Guía Conceptual de Matemática
Tema: Teorema del Binomio.
(Extracto) Montoya

TEOREMA DEL BINOMIO

En esta sección aplicaremos inducción matemática para demostrar la fórmula que permite obtener el desarrollo o un término cualquiera de $(a+b)^n$, $n \in N$. Dicha fórmula es lo que se conoce como *Teorema del Binomio*. Del álgebra elemental se conoce las fórmulas

$$
\begin{array}{lcc}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & a + b \\
(a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{array}
\qquad (1)
$$

………………………………………………………………………………………………………

Si en las expresiones de la derecha consideramos sólo los coeficientes obtenemos el siguiente arreglo conocido como *Triángulo de Pascal :*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\qquad (2)
$$

………………………………………………………………………

La regla de formación de los números en el triángulo de Pascal es clara: los lados del triángulo están formados por unos y cada número que no está sobre un lado del triángulo es la suma de los dos números de la fila superior que son continuos a él.

Un examen de las fórmulas en (1) sugiere que la fórmula general debería ser de la forma:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \quad (3)$$

donde el coeficiente $\binom{n}{k}$ de $a^{n-k}\,b^k$ es un número natural que depende de k y n y, obviamente:

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ $\forall n \in N$. Con esta notación para los coeficientes, el triángulo de Pascal se escribe

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array} \qquad (3)$$

....

De (2) podemos conjeturar otra relación entre los coeficientes binomiales (el estudiante puede agregar nuevas filas a (2) para confirmarlo). Si consideramos la tercera diagonal, formada por los números 1, 3, 6 y 10, se puede observar que los cuocientes de números sucesivos son:

$$\frac{1}{3}\,,\quad \frac{6}{3} = 2 = \frac{4}{2}\,,\quad \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\,,\quad \ldots$$

O sea:

$$\frac{3}{1}\,,\quad \frac{4}{2}\,,\quad \frac{5}{3}\,,\quad \frac{6}{4}\,,\ldots\,,\quad \frac{n+1}{k+1}.$$

Luego, podemos conjeturar que:

$$\binom{n+1}{k+1}/\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\,, \qquad 1 \le k \le n.$$

Por cancelaciones sucesivas (propiedad telescópica del producto) podemos obtener:

$$\binom{n}{k} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{k-2}} \cdot \ ... \ \cdot \frac{\binom{n-k+1}{1}}{\binom{n-k}{0}} \cdot \binom{n-k}{0} =$$

$$= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ ... \ \cdot \frac{n-k+1}{1} \cdot 1 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ ... \ \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \ ... \ \cdot 1} =$$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ ... \ \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1) \cdot \ ... \ \cdot 2 \cdot 1}{\left[(n-k)(n-k-1) \cdot \ ... \ \cdot 2 \cdot 1\right]\left[k(k-1) \cdot \ ... \ \cdot 1\right]} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! \ k!} \ , \qquad 0 \leq k \leq n$$

De lo anterior, la definición siguiente parece razonable.

DEFINICIÓN 1: Sean k, $n \in N_0$, $0 \leq k \leq n$. Definimos el número

$\binom{n}{k}$ que leeremos *n sobre k* por:

$$\binom{n}{K} := \frac{n!}{(n-k)! \, k!}$$

NOTA: Se puede observar que con esta definición se tiene que:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \, 0!} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \, n!} = 1.$$

Las siguientes propiedades se demuestran fácilmente

TEOREMA 1 : Sean k, $n \in N_0$, $k \leq n$. Entonces

(1) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ *(Regla de formación del triángulo de Pascal)*

(2) $\binom{n}{k}$ es un entero no negativo

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (*simetría del triángulo de Pascal*)

Ahora, nuestra conjetura sobre la fórmula general (3) y sobre los coeficientes binomiales se resume el siguiente teorema.

TEOREMA 2: (Teorema del binomio) Si a, b $\in$ R y n $\in$ N, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

COROLARIO: $(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$

OBSERVACIONES: (Nociones elementales de Combinatoria). Consideremos un conjunto de n elementos distintos. Si consideramos todos los arreglos (o distribuciones) que se puede hacer con estos elementos , tomándolos de k en k elementos y de modo que dos arreglos se consideran distintos si difieren en por lo menos un elemento o en el orden del arreglo, entonces cada arreglo se llama una variación (o arreglo sin repetición) y el número total de variaciones se denota por V_k^n $(o \quad A_k^n)$. Si en los arreglos descritos se tiene k=n (participan todos los elementos en cada arreglo), entonces estos arreglos se llaman permutaciones y el número total de ellos se denota por P_n. Si en variaciones de n elementos, tomados de k en k elementos, no interesa el orden, entonces dos de estos arreglos serán distintos si difieren, al menos, en un elemento. Dichos arreglos se llaman, entonces, combinaciones y el número total de ellas se denota por C_k^n. Veamos cómo calcular V_k^n P_n y C_k^n.

1) Si disponemos de casilleros ordenados del 1 al k, entonces calcular V_k^n equivale a calcular de cuántas formas podemos llenar dichos casilleros con n elementos.

1	2	3			…		k

Claramente, con n elementos, el casillero 1 puede ser llenado de n formas distintas. Pero, una vez que ha sido llenado el casillero 1, sólo disponemos de n-1 elementos para llenar el casillero 2 que, por lo tanto, puede llenarse de n-1 formas distintas. Luego los casilleros 1 y 2 pueden llenarse de n(n-1) formas distintas. Así cuando lleguemos al casillero k, dispondremos de n-k+1 elementos para llenarlo de n-k+1 formas distintas. Luego los k casilleros pueden llenarse de

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

formas distintas.

2) Si k=n, entonces

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

3) $C_k^n \cdot k! = V_k^n \Rightarrow C_k^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}.$$

Obtenemos, así, una útil interpretación de los coeficientes binominales.